14/1/20

Συνάρτηση Bessel

Δ.Ε. Bessel: $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (*)$

Σύμφωνα με τη μέθοδο Frobenius έχουμε ότι:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\beta} = c_0 x^{\beta} + c_1 x^{1+\beta} + c_2 x^{2+\beta} + \dots$$

Τότε $y' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\beta) x^{k+\beta-1}$,

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\beta)(k+\beta-1) x^{k+\beta-2},$$

$$x^2 y = \sum_{0}^{\infty} c_k x^{k+\beta-2} = \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+\beta}$$

Αντικαθιστώ στη Δ.Ε. Bessel κ' τελικά έχω:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\beta)(k+\beta-1) x^{k+\beta} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\beta) x^{k+\beta} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-2} x^{k+\beta} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (-n^2) x^{k+\beta} = 0$$

Δηλαδή, $c_k[(k+\beta)(k+\beta-1) + (k+\beta) - n^2] + c_{k-2} = 0$

$\Leftrightarrow c[(k+\beta)(k+\beta+1-1) - n^2] + c_{k-2} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{c_k[(k+\beta)^2 - n^2] + c_{k-2} = 0}$

Υποθ. ότι η λύση είναι $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\beta}$

α) Θεωρούμε ότι οι αρνητικοί δείκτες μηδενίζονται, $c_{-2} = c_{-1} = 0$

β) Για $k=0$: $c_0[\beta^2 - n^2] + c_{-2} = 0 \Leftrightarrow c_0[\beta^2 - n^2] = 0$ $\Rightarrow \beta = \pm n$ (2 περιπτώσεις)

γ) Για $k=1$: $c_1[(1+\beta)^2 - n^2] = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$

δ) 1η περίπτωση $(\beta = n)$ τότε $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{c_0}{4(n+1)}$

$c_3 = 0$, $c_4 = \frac{-c_2}{4(2n+4)} = \frac{c_0}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)}$

Τελικά $y(x) = c_0 x^n + c_2 x^{n+2} + c_4 x^{n+4} + \dots$

$$= c_0 x^n - \frac{c_0}{4(n+1)} x^{n+2} + \frac{c_0 \; x^{n+4}}{2\cdot 4\cdot (2n+2)(2n+4)}$$

Όμοια για την περίπτωση $6=-n$, βρίσκουμε:

$$J_n(x) = y_1(x) = c_0 x^n \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot (2n+2)(2n+4)} + \dots \right]$$

$(6=n)$

$$Y_n(x) = y_2(x) = c_0 x^n \cdot \left[\quad \dots \quad \right] \quad (6=-n)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η αναλυτική λύση της Δ.Ε. Bessel (*) είναι ο γραμμ. συνδυασμός των δύο λύσεων:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x),$$

$J_n(x)$ η συν/ση Bessel 1ου είδους, βαθμού n

$Y_n(x)$ η συν/ση Bessel 2ου είδους, βαθμού n

Χρησιμοποιώντας τη συν/ση $\Gamma(x)$ μπορούμε να γράψουμε:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}}{\Gamma(r+1)\cdot \Gamma(n+r+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}}{r!\,(r+n)!},$$

r: θετικός ακέραιος

Ιδιότητες:

1) Γεννήτρια Συν/ση

Η συν/ση $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x)\cdot t^n$ είναι η γεννήτρια συν/ση των συν/σεων Bessel 1ου είδους

▲ΟΡΙΣΜΟΣ: Οι συν/σεις Bessel 1ου είδους $J_n(x)$ μπορούν να οριστούν ως συντελεστές του t^n στο ανάπτυγμα της συν/σης $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$ σε σειρά. Τότε η $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$ καλείται γεννήτρια συν/ση της $J_n(x)$.

Αποδ.:

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{xt}{2}-\frac{x}{2t}} = e^{\frac{xt}{2}}\cdot e^{-\frac{x}{2t}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^l}{l!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{xt}{2t}\right)^m}{m!}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^l \cdot \left(-\frac{xt}{2}\right)^m}{l!\cdot m!}$$

$$= \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^l \cdot t^l \left(\frac{x}{2}\right)^m \cdot t^{-m}}{l!\cdot m!}$$

$$= \sum_{l,m} \frac{(-1)^m\cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{l+m} \cdot t^{l-m}}{l!\cdot m!},$$ Θέτουμε $n=l-m$ $\Rightarrow l=n+m$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{(n+m)!\cdot m!} t^n = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}{m!\cdot(n+m)!}\right) t^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cdot t^n$$

Γεννήτρια συν/ση: $\boxed{e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n}$

2) Αναδρομικοί Τύποι:

1) $J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} \cdot J_n(x) - J_{n-1}(x)$

2) $J_n'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right]$

3) $\left[x^n \cdot J_n(x)\right]' = x^n \cdot J_{n-1}(x)$

4) $\left[x^{-n} \cdot J_n(x)\right]' = -x^{-n} \cdot J_n(x)$

Αναλυτική Συνέχιση

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x)$$

Συνάρτηση Bessel, 2ου είδους, τάξης n

$$Y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{J_n(x)\cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}, & n \notin \mathbb{Z} \\ \lim\limits_{p \to n} \dfrac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις Bessel 2ου είδους, τάξης n, δίνονται ως συνάρτηση των $J_n(x)$

ΠΑΡΑΔ.: (i) Ν.δ.ο. $J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sin x$ κ:

(ii) $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\cos x$

ΛΥΣΗ:

$$J_{1/2}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1/2}}{r!\,\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,,\qquad \Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)$$

$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right)=\Gamma\left(1+\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right)=\ldots=\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

Άρα $\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)=\frac{(2r-1)!\cdot\sqrt{\pi}}{2^r}$

$$J_{1/2}(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{5/2}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{9/2}}{2!\cdot\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}+\ldots$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{5/2}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{9/2}}{2!\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}-\ldots$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}\cdot\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\ldots\right]$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sin x$$

Πολ/μα Hermite

Δ.Ε. Hermite: $y'' - 2xy' + 2ny = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Τύπος Rodriguez: $H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \cdot e^{-x^2}$

H_n πολ/μα Hermite

π.χ. $H_0 = 1$, $H_1 = 2x$, $H_2 = 4x^2 - 2$,
$H_3(x) = 8x^3 - 12$

Ιδιότητες:

1) Γεννήτρια συνάρτηση

$$e^{2tx - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \cdot t^n$$

2) Αναδρομικοί τύποι:

i) $H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)$

ii) $H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x)$

Εφαρμογή: Ν.δ.ο. $H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \cdot e^{-x^2}$

Απ.:

Από γεννήτρια συνάρτηση έχουμε ότι:

$$e^{2tx - t^2} = e^{x^2 - (t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \cdot t^n$$

Από ορισμό αναπτ. Taylor στη γειτονιά του 0

$$f(t) = e^{2tx - t^2} = e^{x^2 - (t-x)^2} = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot t^n$$

$$H_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(e^{2(x-t^2)}\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(e^{x^2 - (t-x)^2}\right) =$$

$$= e^{x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t^n} \cdot e^{-(t-x)^2} = e^{x^2} \cdot \frac{\partial^n}{\partial t^n} \cdot e^{-(t-x)^2} \Bigg|_{t=0} =$$

$$= e^{x^2} \cdot (-1)^n \cdot \frac{\partial^n}{\partial t^n} \cdot e^{-(t-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \cdot e^{-(t-x)^2}$$

Παρατήρηση: Εδώ ισχύει ότι:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x-t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x-t)$$

Πολ/μα Legendre

Δ.Ε. Legendre: $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$

Υποθ. ότι $y = \sum_n c_n x^{n+6}$

$P_n(x)$, πολ/μα Legendre βαθμών n

$Q_n(x)$, συν/σεις Legendre, 2ου είδους, βαθμού n

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$,

$P_2(x) = \frac{1}{2} \cdot (3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2} \cdot (5x^3 - 3x)$

Τύπος Rodrigues: $P_n(x) = \frac{1}{2n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2-1)^n$

Γεννήτρια Συν/ση:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot t^n$$